



## V. Országos Magyar Matematikaolimpia

## XXXII. EMMV

megyei szakasz, 2023. február 4.

## IX. osztály

**1. feladat** (10 pont). Oldd meg az  $\left[\frac{x^2+x}{2} + 2021\right] = |x+2022|$  egyenletet, ahol  $[a]$  az  $a$  valós szám egész részét,  $|a|$  pedig a modulusát jelöli.

Matlap 10/2022 L:3515

*Megoldás.* Hivatalból

(1 pont)

Az egyenlőség bal oldala egy egész szám, így a jobb oldalon lévő kifejezés is egész kell legyen. Ez akkor és csak akkor teljesülhet, ha  $x$  egész szám.

(2 pont)

Továbbá bármely  $x$  egész szám esetén az  $x^2 + x = x(x+1)$  kifejezés páros, mert két egymást követő egész szám közül az egyik biztosan páros. Így  $\frac{x^2+x}{2}$  is egész szám, tehát  $\left[\frac{x^2+x}{2} + 2021\right] = \frac{x^2+x}{2} + 2021$ .

(3 pont)

Ezek alapján az egyenlet egyenértékű azzal, hogy  $\frac{x^2+x}{2} + 2021 = |x+2022|$ . Két esetet különböztetünk meg.

I. Ha  $x \geq -2022$ , akkor a következő egyenértékű átalakításokat végezhetjük:

$$\frac{x^2+x}{2} + 2021 = |x+2022| \iff \frac{x^2+x}{2} + 2021 = x+2022 \iff x^2 - x - 2 = 0.$$

Az utóbbi egyenlet megoldásai  $x_1 = -1 \geq -2022$  és  $x_2 = 2 \geq -2022$ .

(2 pont)

II. Ha  $x < -2022$ , akkor a következő egyenértékű átalakításokat végezhetjük:

$$\frac{x^2+x}{2} + 2021 = |x+2022| \iff \frac{x^2+x}{2} + 2021 = -x-2022 \iff x^2 + 3x + 8086 = 0.$$

Az utóbbi egyenletnek nincsenek valós megoldásai.

(1 pont)

Tehát az egyenlet megoldáshalmaza  $M = \{-1, 2\}$ .

(1 pont)

■

**2. feladat** (10 pont). Igazold, hogy bármely  $x, y, z > 0$  valós számok esetén teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek:

a)  $2x\sqrt{yz} \leq x^2 + yz$ ;

b)  $\frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + xz} + \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} \right)$ ;

c)  $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$ .

Durugy Erika, Torda

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

- a) A számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség alapján minden  $x, y, z > 0$  esetén

$$\sqrt{x^2 \cdot yz} \leq \frac{x^2 + yz}{2}.$$

Mivel  $x > 0$ , az következik, hogy  $2x\sqrt{yz} \leq x^2 + yz$ .

(2 pont)

**Megjegyzés.** A bizonyítandó egyenlőtlenség egyenértékű azzal, hogy  $0 \leq (x - \sqrt{yz})^2$ , ami teljesül, bármely  $x, y, z > 0$  esetén.

- b) Az a) alpontban igazolt egyenlőtlenség alapján következik, hogy az  $x, y, z > 0$  számok esetén  $\frac{1}{x^2+yz} \leq \frac{1}{2x\sqrt{yz}}$ , hasonlóan  $\frac{1}{y^2+zx} \leq \frac{1}{2y\sqrt{zx}}$  és  $\frac{1}{z^2+xy} \leq \frac{1}{2z\sqrt{xy}}$ .

(1 pont)

Összeadva az egyenlőtlenségek megfelelő oldalait, azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{x^2+yz} + \frac{1}{y^2+zx} + \frac{1}{z^2+xy} \leq \frac{1}{2x\sqrt{yz}} + \frac{1}{2y\sqrt{zx}} + \frac{1}{2z\sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{xz}}{2xyz}. \quad (1 \text{ pont})$$

A számtani és mértani középarányosok közti egyenlőtlenség alapján minden  $x, y, z > 0$  esetén  $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ ,  $\sqrt{yz} \leq \frac{y+z}{2}$  és  $\sqrt{xz} \leq \frac{x+z}{2}$ , ahonnan  $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{xz} \leq \frac{2(x+y+z)}{2} = x + y + z$ . Tehát  $\frac{1}{x^2+yz} + \frac{1}{y^2+zx} + \frac{1}{z^2+xy} \leq \frac{x+y+z}{2xyz}$ , ez pedig egyenértékű azzal, hogy

$$\frac{1}{x^2+yz} + \frac{1}{y^2+zx} + \frac{1}{z^2+xy} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right),$$

bármely  $x, y, z > 0$  esetén.

(2 pont)

- c) Az egyenlőtlenség mindkét oldalát 2-vel beszorozva, majd átrendezve, a következő egyenértékű átalakításokat végezhetjük:

$$\begin{aligned} \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} &\leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \frac{1}{x^2} - \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{2}{yz} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^2} - \frac{2}{zx} + \frac{1}{x^2} \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)^2 + \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{z} \right)^2 + \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{x} \right)^2, \end{aligned}$$

ez pedig teljesül minden  $x, y, z > 0$  esetén.

(3 pont)

■

**3. feladat** (10 pont). Egy 2023 oldalú szabályos sokszög csúcsai közül egyet zöldre, a többi fehérre vagy pirosra festjük. Tekintsük az összes olyan konvex sokszöget, amelyeknek csúcsai az adott sokszög csúcsai közül valók. Mely konvex sokszögekből van több és mennyivel: azokból, amelyeknek egyik csúcsa zöld, vagy azokból, amelyeknek nincs zöld csúcsa?

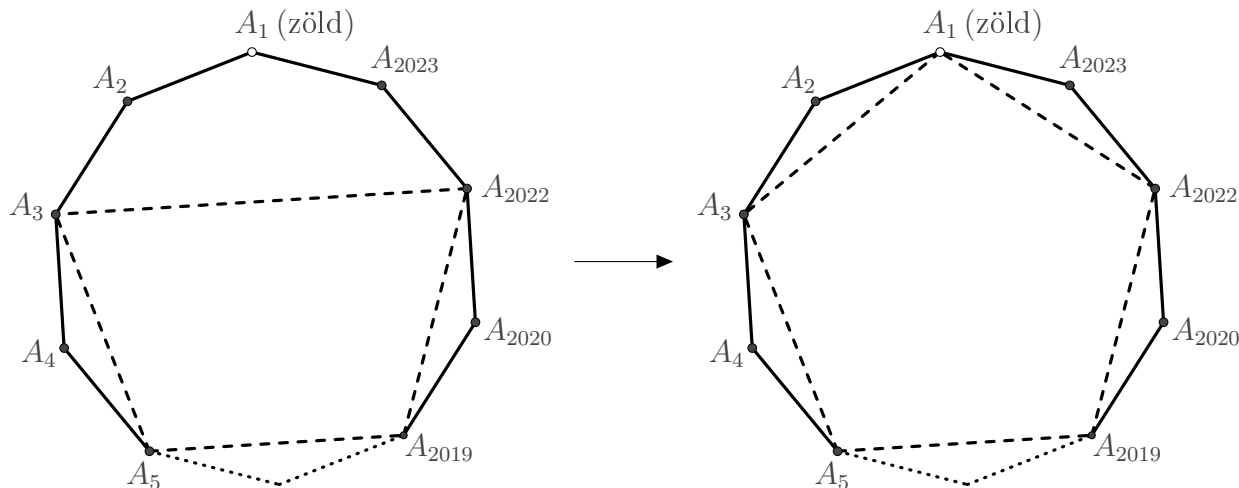
Zay Éva, Zilah

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Minden zöld csúccsal nem rendelkező konvex sokszöghöz társítható egy eggyel nagyobb oldalszámú konvex sokszög a zöld csúcs hozzáadásával. Így legalább annyi zöld csúccsal rendelkező sokszög van, mint ahány zöld csúcs nélküli.

(3 pont)



Tekintjük azokat a háromszögeket, amelyeknek egyik csúcsa zöld, a másik két csúcs pedig fehér vagy piros. Ezekhez a konvex sokszögekhez (háromszögekhez) nem társítottunk zöld csúcs nélküli konvex sokszöget a fenti módon. Ezen háromszögek száma megegyezik azon szakaszok számával, amelyeknek egyik végpontja sem zöld. Az eredeti sokszögnek két olyan oldala van, amelynek egyik végpontja zöld, így  $2023 - 2 = 2021$  olyan oldala van, amelynek egyik végpontja sem zöld.

(1 pont)

A megadott 2023 oldalú sokszögnek  $\frac{2023(2023-3)}{2} = 2023 \cdot 1010 = 2\,043\,230$  átlója van. A zöld csúcsból kiinduló átlók száma pedig  $2023 - 3 = 2020$ . Így a zöld csúcsot nem tartalmazó átlók száma

$$\frac{2023 \cdot 2020}{2} - 2020 = \frac{2021 \cdot 2020}{2} = 2021 \cdot 1010 = 2\,041\,210.$$

(3 pont)

Következésképpen a zöld csúcsot tartalmazó háromszögek szerkesztéséhez 2021 oldalt és  $1010 \cdot 2021$  átlót, azaz  $2021 + 1010 \cdot 2021 = 2021 \cdot 1011 = 2\,043\,231$  szakaszt használtunk fel.

(1 pont)

Tehát az egy zöld csúccsal is rendelkező konvex sokszögek száma  $2\,043\,231$ -gyel több, mint azoknak a konvex sokszögeknek a száma, amelyeknek nincs zöld csúcsa.

(1 pont)

■

**4. feladat** (10 pont). Az  $ABC$  háromszög síkjában lévő  $M$  pont szimmetrikusát az  $AB$ ,  $AC$  és  $BC$  oldalak felezőpontjára nézve jelölje  $M_1$ ,  $M_2$  és  $M_3$ . Továbbá legyen  $A'$  a sík azon pontja, amelyre  $\overrightarrow{A'A} = 2(\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C})$ . Igazold, hogy ha az  $A$ ,  $A'$  és  $M$  pontok nem kollineárisak, akkor az  $AG'A'M$  négyszög egy paralelogramma, ahol  $G'$  az  $M_1M_2M_3$  háromszög súlypontja.

Tóth Csongor, Szováta

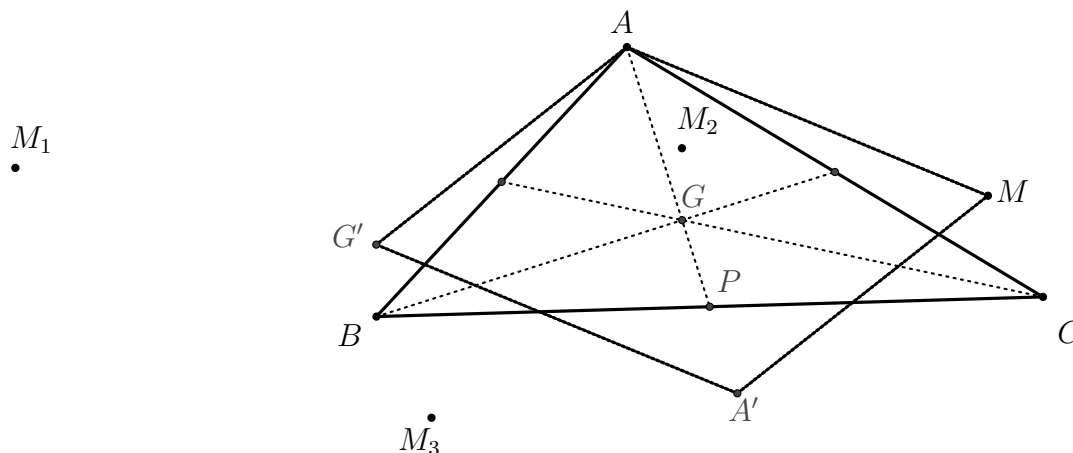
Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Ha  $P$  a  $BC$  szakasz felezőpontja, akkor a sík tetszőleges  $Q$  pontja esetén  $\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} = 2\overrightarrow{QP}$ , sajátosan  $Q = A'$  esetén kapjuk, hogy  $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = 2\overrightarrow{A'P}$ . Így a megadott  $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \frac{\overrightarrow{A'A}}{2}$  feltételt felhasználva azt kapjuk, hogy  $\overrightarrow{A'A} = 4\overrightarrow{A'P}$ . Ez pedig egyenértékű azzal, hogy  $\overrightarrow{A'P} + \overrightarrow{PA} = 4\overrightarrow{A'P}$ , ahonnan  $\overrightarrow{PA} = 3\overrightarrow{A'P}$ . Továbbá  $\overrightarrow{PA} = 3\overrightarrow{PG'}$ , ahol  $G'$  az  $ABC$  háromszög súlypontja. Következésképpen  $\overrightarrow{A'P} = \overrightarrow{PG'}$ . Ez azt jelenti, hogy  $A'$  pont a  $G'$  pontnak a szimmetrikusa a  $P$  pontra nézve, sőt a

$G$  pont az  $AA'$  szakasz felezőpontja.

(3 pont)



Mivel  $G$  súlypontja az  $ABC$  háromszögnek, ezért

$$\overrightarrow{MG} = \frac{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}}{3}. \quad (1 \text{ pont})$$

Másrészt

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MG'} &= \frac{\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_2} + \overrightarrow{MM_3}}{3} \\ &= \frac{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}}{3} \\ &= \frac{2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})}{3} = 2 \cdot \overrightarrow{MG}. \end{aligned}$$

(3 pont)

Mivel  $\overrightarrow{MG'} = 2\overrightarrow{MG}$ , ezért a  $G$  pont felezőpontja az  $MG'$  szakasznak is, tehát az  $AG'A'M$  négyszög átlói felezik egymást, így ez a négyszög egy paralelogramma. (2 pont)

