

Országos Matematika Olimpia  
Megyei forduló - 2023. március 11.

## X. OSZTÁLY

1. feladat. Határozd meg a

$$2^{x-1} + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 3.$$

egyenlet összes valós megoldását!

*Supliment Gazeta Matematică*

2. feladat. Az  $ABC$  egyenlő oldalú háromszög köré írt kör kisebbik  $AB$  körívén vegyük fel az  $N$  pontot úgy, hogy az  $NB$  körív mértéke  $30^\circ$ . Az  $N$  pontból merőlegeseket húzunk az  $AC$  és  $AB$  oldalakra. Ezek a merőlegesek az  $ABC$  háromszög köré írt kört másodszor az  $M$ , illetve  $I$  pontokban metszik.

a) Bizonyítsd be, hogy az  $IMN$  háromszög egyenlő oldalú!

b) Ha  $H_1, H_2$  és  $H_3$  az  $NAB, IBC$ , illetve  $CAM$  háromszög magasságpontja, bizonyítsd be, hogy a  $H_1H_2H_3$  háromszög egyenlő oldalú!

3. feladat. Adott az  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$  szám. Határozd meg az összes  $z \in \mathbb{C}$  számot, amelyre:

$$|z^{n+1} - z^n| \geq |z^{n+1} - 1| + |z^{n+1} - z|.$$

4. feladat. Határozd meg az összes olyan  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt, amelyre:

$$f(xf(x) + f(y)) = f(f(x^2)) + y,$$

bármely  $x, y \in \mathbb{R}$ .

*Munkaidő 3 óra + 30 perc a feladatok kijelentésével kapcsolatos kérdések megválaszolására.*

*Minden feladatra 7 pont szerezhető.*