

Országos Matematika Olimpia  
Megyei forduló - 2023. március 11.

## VIII. OSZTÁLY

**1. feladat.** Az  $SABCD$  gúla alapja az  $ABCD$  paralelogramma. Az  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$  és  $SD$  éleken felvesszük az  $M$ ,  $N$ ,  $P$ , illetve  $Q$  pontokat úgy, hogy  $MNPQ$  paralelogramma legyen.

a) Ha  $ABCD$  rombusz, bizonyítsd be, hogy  $MNPQ$  is rombusz!

b) Ha  $ABCD$  téglalap, bizonyítsd be, hogy  $MNPQ$  is téglalap!

*Gazeta Matematică*

**2. feladat.** Az  $(a, b, c)$  egész számokból álló számhármast *művészi* számhármasnak nevezzük, ha  $\frac{ab + bc + ca}{a + b + c}$  egész szám.

a) Határozd meg azokat az  $n$  egész számokat, amelyekre az  $(n, n + 1, n + 3)$  számhármast művészi.

b) Ha  $(x, y, z)$  egy művészi számhármast, bizonyítsd be, hogy  $\frac{x^4 + y^4 + z^4}{x + y + z}$  egész szám!

**3. feladat.** Határozd meg azokat az  $a$ ,  $b$  és  $c$  nemnulla természetes számokat, amelyekre egyszerre igazak az alábbi feltételek:

(i)  $(a^2 + b^2)(c^2 + 2023^2) = (ab + 2023c)^2$ ;

(ii)  $(a^2 + 2023^2)(b^2 + c^2) = (2023a + bc)^2$ ;

(iii) az  $a$ ,  $b$ ,  $c$  és 2023 számok legnagyobb közös osztója 1.

**4. feladat.** Az  $ABCD$  tetraéderben  $\widehat{BAC} + \widehat{CAD} + \widehat{DAB} = 180^\circ$ ,  $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DAB}$ , a  $D$  pont vetülete az  $(ABC)$  síkra az  $ABC$  háromszög magasságpontja. Bizonyítsd be, hogy  $AB = AC$  és  $DB = DC$ .

*Munkaidő 3 óra + 30 perc a feladatok kijelentésével kapcsolatos kérdések megválaszolására.*

*Minden feladatra 7 pont szerezhető.*