



**CONCURSUL NAȚIONAL  
DE MATEMATICĂ APLICATĂ  
"ADOLF HAIMOVICI"  
ETAPA JUDEȚEANĂ – 11 martie 2023  
Secțiunea H1**



FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

Filiera tehnologică – toate profilurile

**XI. osztály**

**1. feladat**

Az  $M_2(\mathbb{R})$  halmazban adottak az  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  és  $C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2023^n & 7 \end{pmatrix}$  mátrixok, ahol  $n \in \mathbb{N}$ .

- Igazold, hogy **nem** léteznek olyan  $a, b, c \in \mathbb{R}$  és  $n \in \mathbb{N}$  számok, amelyekre teljesüljön az  $aA + bB + cI_2 = C$  egyenlőség!
- Határozd meg az  $A^{2023}$  mátrixot!
- Bizonyítsd be, hogy  $B^n = I_2 + (2^n - 1)A$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  esetén!

**2. feladat**

Adott a  $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$  mátrixhalmaz.

- Ha  $A, B \in G$  igazold, hogy  $A + B \in G$  és  $A \cdot B \in G$ .
- Bizonyítsd be, hogy a  $G$  halmaz minden nullmátrixtól különböző mátrixa invertálható!
- Ha  $A, B \in G$  és  $A \cdot B = O_2$  igazold azt, hogy akkor  $A = O_2$  vagy  $B = O_2$ .

**3. feladat**

Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 2^x \cdot x, & x < 1 \\ x^2 + 2x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$  függvény.

- Határozd meg az  $f$  függvény grafikus képének aszimptotáját a  $-\infty$  felé!
- Igazold, hogy az  $f(x) = 0$  egyenletnek van legalább egy megoldása a  $[-1, 2]$  intervallumban!
- Határozd meg az  $a \in \mathbb{R}$  értékét úgy, hogy az  $f$  függvény grafikus képének az  $x_0 = 0$  abszcisszájú pontjában húzott érintője párhuzamos legyen az  $y = ax + 2$  egyenletű egyenessel!

**4. feladat**

Egy XI-es osztályban a tanár felírja a táblára az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin x + \cos x + x$  függvényt. Minden  $n \geq 1$  természetes szám esetén a következő jelöléseket alkalmazza:  $f_1(x) = f(x)$  ahol  $x \in \mathbb{R}$  és  $f_{n+1}(x) = f'_n(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  esetén. A tanár a következő játékot javasolja az osztálynak: minden tanuló névsor szerinti sorrendben kimegy a táblához és felírja a táblára az  $f_n(0)$  értéket, ahol  $n$  a tanuló sorszáma az osztálynpló szerint.

- Milyen számok jelennek meg a táblán?
- Ha az osztályban 28 tanuló van, határozd meg a táblára felírt számok közül az utolsó kettőt, és azt is, hogy ez a két szám hányszor jelenik meg a táblán!