

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**PRIMO QUESITO**

**(30 puncti)**

- 5p 1. Demonstrate che  $3 - 4i + i(4 - i) = 4$ , con  $i^2 = -1$ .
- 5p 2. Si considera la funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 4 - 2x$ . Dimostrate che  $(f \circ f)(1) = 0$ .
- 5p 3. Risolvete nell'insieme dei numeri reali l'equazione  $\log_5(x^2 - 2x + 6) = \log_5 6$ .
- 5p 4. Calcolate la probabilità che, scegliendo un numero dell'insieme dei numeri naturali di due cifre, questo sia divisibile per 3 e per 7.
- 5p 5. Nel riferimento cartesiano  $xOy$  si considerano i punti  $A(1,2)$ ,  $B(a,0)$  e  $C(0,b)$ . Determinate i numeri reali  $a$  e  $b$ , conoscendo che  $A$  è il punto medio del segmento  $BC$ .
- 5p 6. Si considera il triangolo  $ABC$ , con  $AB = AC = 10$  e  $BC = 16$ . Dimostrate che  $AD = 6$ , dove  $AD$  è l'altezza del triangolo  $ABC$ .

**SECONDO QUESITO**

**(30 puncti)**

1. Si considerano le matrici  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$  e  $B(x) = \begin{pmatrix} x+1 & 2x+1 \\ x-1 & 2x-1 \end{pmatrix}$ , con  $x$  numero reale.
- 5p a) Dimostrate che  $\det(B(2)) = 4$ .
- 5p b) Determinate il numero reale  $a$  per il quale  $B(0) \cdot B(1) = aA$ .
- 5p c) Determinate il numero reale  $x$  per il quale  $A \cdot B(x) = A \cdot (B(0) - 3I_2)$ .
2. Si considera il polinomio  $f = X^3 + 2X^2 + mX - 3$ , con  $m$  numero reale.
- 5p a) Per  $m = 0$ , dimostrate che  $f(1) = 0$ .
- 5p b) Determinate il numero reale  $m$  per il quale il polinomio  $f$  è divisibile per il polinomio  $X + 1$ .
- 5p c) Determinate il numero reale  $m$  per il quale  $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) = x_1x_2x_3$ , dove  $x_1$ ,  $x_2$  ed  $x_3$  sono le radici del polinomio  $f$ .

**TERZO QUESITO**

**(30 puncti)**

1. Si considera la funzione  $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + x - 2}$ .
- 5p a) Dimostrate che  $f'(x) = \frac{3x(x-4)}{(x^2 + x - 2)^2}$ ,  $x \in (1, +\infty)$ .
- 5p b) Determinate l'equazione dell'assintoto orizzontale verso  $+\infty$  al grafico della funzione  $f$ .
- 5p c) Dimostrate che  $f(x) + f(x^2) \geq \frac{17}{3}$ , per qualsiasi  $x \in (1, 2]$ .
2. Si considera la funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x(x-1)^2$ .
- 5p a) Dimostrate che  $\int_3^7 \frac{f(x)}{(x-1)^2} dx = 20$ .
- 5p b) Dimostrate che  $\int_2^3 \frac{x}{f(x)} dx = \frac{1}{2}$ .
- 5p c) Dimostrate che  $\int_0^1 \frac{xf(e^x)}{e^x} dx = \frac{e^2 - 5}{4}$ .